Числовые последовательности. Дополнительные материалы

Приведем независимое доказательство одной из важнейших теорем раздела — теоремы Больцано–Вейерштрасса.

Теорема 1 (Больцано, Вейерштрасс)**.** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Используем метод деления отрезка пополам. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, тогда найдутся такие вещественные числа a и b, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам и выберем ту половину, которая содержит бесконечно много элементов последовательности. Заметим, что такая половина обязательно есть — если и левая, и правая половина отрезка содержат лишь конечное число элементов последовательности, то вся последовательность состоит из конечного числа элементов, что невозможно. Если обе половины отрезка содержат бесконечно много элементов последовательности, то возьмем любую из них — например, левую.

Обозначим выбранную половину через $[a_1, b_1]$ (то есть либо $a_1 = a$, $b_1 = (a+b)/2$, либо $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = b$). Теперь повторим ту же процедуру с отрезком $[a_1, b_1]$: разделим его пополам, выберем половину, содержащую бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, и обозначим ее $[a_2, b_2]$. И так далее, получим последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$. Очевидно, что их длины $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам. Покажем, что она является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $b_n - a_n \to 0$, то найдется $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $b_N - a_N < \varepsilon/2$. Так как $c \in [a_N, b_N]$, то этот отрезок целиком лежит в окрестности $B_\varepsilon(c)$ (длина отрезка меньше радиуса окрестности). Но по построению отрезок $[a_N, b_N]$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Значит, мы показали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ в $\varepsilon-$окрестности точки c содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Это и означает, что c — предельная точка этой последовательности или, эквивалентно, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к c. $\square$

В качестве следствия приведем еще одно доказательство того, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний и нижний пределы совпадают.

Следствие. *Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний предел равен нижнему.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу x. Тогда она ограничена (свойства сходящейся последовательности) и имеет единственную предельную точку x. Очевидно, что тогда верхний и нижний пределы также равны x.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и ее верхний и нижний пределы равны между собой. Значит, у последовательности есть только одна предельная точка. Обозначим ее через x. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, значит найдутся такие числа a и b, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда точка x также принадлежит отрезку

$[a, b]$. Докажем, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Предположим противное: $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall N \in \mathbb{N}$ найдется $n \geqslant N$: $|x_n - x| \geqslant \varepsilon$. Это означает, что бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ принадлежат множеству $A = [a, b] \setminus (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Эти элементы образуют некоторую подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Данная подпоследовательность, очевидно, ограничена, следовательно, у нее есть по крайней мере одна предельная точка y. Из теоремы о переходе к пределу в неравенствах для последовательностей следует, что $y \in A$. Но тогда $y \neq x$, что противоречит тому, что x — единственная предельная точка $\{x_n\}$. $\square$

Докажем еще несколько полезных фактов о сходящихся последовательностях.

Утверждение 1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Тогда последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, также сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.*

Доказательство. Будем рассуждать, используя определение предела последовательности. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Запишем цепочку преобразований, полагая, что $n \geqslant N$:

$$|a_n - a| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - an}{n}\right| =$$
$$= \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{N-1} - a(N-1) + (x_N - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{N-1} - a(N-1)}{n}\right| + \frac{|x_N - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} < \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{N-1} - a(N-1)}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим первое слагаемое в последнем выражении. Поскольку в числителе стоит конечная сумма, зависящая только от номера $N(\varepsilon)$, то найдется такое $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $N > N_1$ и для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1$ будет выполнено: $\left|\dfrac{x_1 + \ldots + x_{N-1} - a(N-1)}{n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Окончательно получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. при всех $n \geqslant N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. $\square$

Аналогично можно доказать, что если $x_n \to \pm\infty$ при $n \to +\infty$, то и $a_n \to \pm\infty$.

Заметим, что из сходимости последовательности $\{a_n\}$ средних арифметических не следует сходимость исходной последовательности $\{x_n\}$! Действительно, возьмем $x_n = (-1)^n$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ расходится, а последовательность средних арифметических сходится, так как $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Утверждение 2. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a и известно, что $x_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$, также сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$.*

Доказательство. Пусть сначала $a \neq 0$. Воспользуемся неравенством Коши о связи между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

если $x_k > 0$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Из предыдущего утверждения следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a$. С другой стороны, $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{a}$ при $n \to +\infty$, следовательно (снова используем предыдущее утверждение),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}} = \frac{1}{1/a} = a.$$

Отсюда и из теоремы о двух милиционерах получаем сразу, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = a$.

Пусть теперь $a = 0$. Тогда можем записать

$$0 < \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

и снова применить теорему о двух милиционерах: согласно предыдущему утверждению $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a = 0$, значит, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = 0$. $\square$

Пример. Докажем, что если $x_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Пользуясь доказанным утверждением, вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, где $y_1 = x_1$, $y_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ при $n \geqslant 2$. Поскольку $y_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. С другой стороны,

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \sqrt[n]{x_n},$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Первое утверждение доказано.

Применим теперь его к вычислению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Положим $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем еще одну теорему, которая может пригодиться при решении хитрых задачек. Что-то вроде дискретного правила Лопиталя.

Теорема 2 (Штольц). *Пусть последовательность $\{y_n\}$ возрастает и стремится к $+\infty$ при $n \to +\infty$. Последовательность $\{x_n\}$ — произвольная. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, то существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ и*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. Возьмем $\varepsilon>0$ и найдем $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. при всех $n\geqslant N$ будет выполнено:

$$a-\varepsilon/2<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\varepsilon/2.$$

Поскольку $y_{n+1}>y_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$, то можем домножить все части последнего неравенства на выражение $y_{n+1}-y_n>0$:

$$(a-\varepsilon/2)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\varepsilon/2)(y_{n+1}-y_n).$$

Это неравенство выполнено для всех номеров, начиная с N. Запишем его несколько раз:

$$(a-\varepsilon/2)(y_{N+1}-y_N)<x_{N+1}-x_N<(a+\varepsilon/2)(y_{N+1}-y_N),$$
$$(a-\varepsilon/2)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\varepsilon/2)(y_{N+2}-y_{N+1}),$$
$$\ldots$$
$$(a-\varepsilon/2)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(a+\varepsilon/2)(y_n-y_{n-1}),$$

где $n>N$ — произвольное. Сложим все написанные неравенства и приведем подобные. Получим

$$(a-\varepsilon/2)(y_n-y_N)<x_n-x_N<(a+\varepsilon/2)(y_n-y_N).$$

Теперь добавим ко всем частям неравенства x_N и разделим на $y_n>0$ (поскольку $y_n\to+\infty$, без ограничения общности можем считать, что $y_n>0$ при $n\geqslant N$):

$$(a-\varepsilon/2)+\frac{x_N-(a-\varepsilon/2)y_N}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<(a+\varepsilon/2)+\frac{x_N-(a+\varepsilon/2)y_N}{y_n}.$$

Отсюда следует, что при всех $n>N$ выполнена оценка

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|x_N|+|y_N|(|a|+\varepsilon/2)}{y_n}.$$

Наконец, $y_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, следовательно, найдется $N_1>N$, т.ч. при всех $n\geqslant N_1$ будет выполнено $\dfrac{|x_N|+|y_N|(|a|+\varepsilon/2)}{y_n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (в числителе стоит фиксированное число, знаменатель стремится к бесконечности).

Подведем итог. Для любого $\varepsilon>0$ нашлось $N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n\geqslant N_1$ имеет место оценка

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$. □

Пример. Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a+\dfrac{a^2}{2}+\ldots+\dfrac{a^n}{n}\right)$, $a>1$.

Обозначим $x_n=a+\dfrac{a^2}{2}+\ldots+\dfrac{a^n}{n}$, $y_n=\dfrac{a^{n+1}}{n}$. Тогда все условия теоремы Штольца выполнены и можем написать:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^{n+2}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(an-n-1)}=\frac{1}{a-1}.$$